$(c-a)^2-(c-a)(b-a)(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}})+(b-a)^2=0$

$(c-a)^2-(c-a)(b-a)+(b-a)^2=0$

$c^2-2ac+a^2-cb+ac+ab-a^2+b^2-2ab+a^2=0$

$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Solution 21 :

1°/M = B * C d'où $z_M=\frac{z_B+z_C}{2}$

et par suite $m=\frac{b+c}{2}$

On a : $R(A,\frac{-\pi}{2})(B)=B'$ d'où $z_B=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_B+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})z_A \Rightarrow$

$b'=-ib+(1+i)a$

$R(A,\frac{\pi}{2})(C)=C'$ d'où $z_C=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_C+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})z_A$

$\Rightarrow c'=-ic+(1+i)a$

2°/ $\frac{aff\,\overrightarrow{AM}}{aff\,\overrightarrow{B'C'}}=\frac{m-a}{c'-b'}=\frac{\frac{b+c}{2}-a}{ic+(1-i)a+ib-(1+i)a}=\frac{b+c-2a}{2(ic-2ia+ib)}$

$=\frac{b+c-2a}{2i(b+c-2a)}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2}\in i\mathbb{R}$

D'où (AM) $\perp$ (B'C').

$\frac{AM}{B'C'}=\left|\frac{m-a}{c'-b'}\right|=\left|\frac{-i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ d'où $AM=\frac{1}{2}B'C'$

et par suite B'C' = 2 AM .

Solution 22 :

1°/

- On a : $A'=R(O,\frac{\pi}{2})(A)$ donc $z_{A'}=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_A+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})z_O$

  Or $z_{A'}=z_I'$, $z_A=z_I$ et $z_O=0$ d'où $z_I'=iz_I$.